

# 均匀化方法的 ABAQUS 实现

黄富华, 梁 军, 杜善义

(哈尔滨工业大学 复合材料与结构研究所, 哈尔滨 150001, hfholdmelodies@hit.edu.cn)

摘要: 为了利用通用有限元软件来对复杂的均匀化方程进行便捷求解, 从而对具有周期性构造复合材料有效性能进行预测. 根据文献[1]提出的热应力方法和边界力方法将均匀化方程转化为通用有限元可以进行计算的形式, 通过 ABAQUS 用户子程序和脚本语言的编写, 便捷的实现了均匀化方程的求解, 得到了均匀化系数. 通过均匀化方程的 ABAQUS 的便捷求解(包括热应力方法和边界力方法), 计算了单向复合材料有效性能, 并与细观力学方法进行比较, 结果表明两种方法具有一致性和有效性.

关键词: 有限元; ABAQUS; 均匀化方法; 单向复合材料

中图分类号: TB33 文献标志码: A 文章编号: 0367-6234(2010)03-0389-04

## Realization of homogenization method with ABAQUS

HUANG Fu-hua, LIANG Jun, DU Shan-yi

(Center for Composite Material, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, hfholdmelodies@hit.edu.cn)

**Abstract:** To use the commonly finite element software to conveniently realize the calculation of homogenization method, the paper proposes two realization methods of homogenization using ABAQUS software: thermal stress method and boundary force method. The control equation of homogenization method is converted to the form which can be solved with commonly finite element software. ABAQUS user subroutine and ABAQUS scripting are programed in this article to calculate the homogenization equations. Then the homogenized coefficient is calculated by the two proposed methods for unidirectional composite material, the results show that the two methods agree well with theoretical results.

**Key words:** finite element method; ABAQUS; homogenization method; unidirectional composite material

采用数值理论来预测复合材料性能从起步阶段的不同夹杂模型的 Eshelby<sup>[2]</sup>方法、Mori-Tanaka<sup>[3]</sup>方法 (MTM), 发展到 Hill<sup>[4]</sup>的自洽方法 (SCM) 到现在由 Benssousan<sup>[5]</sup>和 Sanchez-Palencia<sup>[6]</sup>提出的均匀化方法, 都属于目前比较流行的多尺度摄动方法的范畴. 均匀化方法由刚开始的线弹性问题<sup>[7]</sup>发展到非线性问题<sup>[8]</sup>. B. Hassani 等<sup>[9-11]</sup>详细阐述了均匀化过程. 数值解法与拓扑优化, 得到了许多有价值的计算公式和结论. 刘书田等<sup>[12]</sup>对均匀化过程进行了详细的分析, 并运用它解决具有周期性分布的多孔板的弯曲问题、复

合材料的热膨胀问题及功能梯度材料的优化设计问题. 本文通过对均匀化方程的高斯定理处理, 转化为通用有限元可以进行计算的形式. 利用 ABAQUS 用户子程序 (ABAQUS user subroutine) 和脚本语言的编写 (ABAQUS scripting) 做到了在 ABAQUS 中均匀化方法的便捷实现.

### 1 均匀化方法

#### 1.1 单胞问题的控制方程

单胞特征函数均匀化控制方程为

$$[C_{ijkl}(\chi_{(k, \delta_j)mn} + I_{klmn})]_{, \delta_j} = 0, \text{ on } \Theta. \quad (1)$$

$$\chi_{imn}(y) = \chi_{imn}(y + Y), \text{ on } \partial\Theta. \quad (2)$$

$$\chi_{imn}(y) = 0, \text{ on } \partial\Theta^{\text{vert}}. \quad (3)$$

其中:

$$I_{klmn} = (\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{nk}\delta_{ml})/2. \quad (4)$$

收稿日期: 2009-04-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772060); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC2006-13).

作者简介: 黄富华(1980—)男, 博士;

梁 军(1969—)男, 教授, 博士生导师;

杜善义(1938—)男, 教授, 中国工程院院士.

$$\chi_{(k \ \delta_l)mn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi_{kmn}}{\partial y_l} + \frac{\partial \chi_{lmn}}{\partial y_k} \right). \quad (5)$$

式中:  $\Theta$  为单胞区域,  $\partial\Theta$  为单胞的边界,  $\partial\Theta^{vert}$  为单胞在边界上的顶点. 单胞的均匀化系数可表示为

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|\Theta|} \int_{\Theta} C_{ijkl} (\chi_{(k \ \delta_l)mn} + I_{klmn}) dV. \quad (6)$$

### 1.2 控制方程的处理

#### 1.2.1 热应力方法

在式 (1) 中, 令:

$$\sigma_{ij}^{mn} = C_{ijkl} (\chi_{(k \ \delta_l)mn} + I_{klmn}) = C_{ijkl} (\chi_{(k \ \delta_l)mn} - \kappa_{kl}^{mn} \Delta T). \quad (7)$$

选择合适的  $\kappa_{kl}^{mn}$  (相当于热应力计算的热膨胀系数) 并取  $\Delta T = 1$ , 则原均匀化方程就转化为由于温度变化存在的热应力方程, 均匀化系数就是热应力解中各应力分量在单胞上的体积平均.

#### 1.2.2 边界力方法

利用高斯定理对均匀化控制方程的进行处理, 转化为与原问题等价的“弱”解形式为

$$\int_{\Theta} C_{ijkl} \chi_{(k \ \delta_l)mn} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial y_i} \right) dV = - \sum_p \int_{\partial\Theta^p - \partial\Theta^p \cap \partial\Theta} C_{ijmn} n_j \delta v_i dS. \quad (8)$$

从式 (8) 可以发现原问题的控制方程等同于三维线弹性问题的“弱”解形式的方程, 不同之处在于材料内部存在一个与材料属性和边界形状有关的面分布力, 这个面分布力作用在单胞中不同材料的内部边界上 ( $\partial\Theta^p - \partial\Theta^p \cap \partial\Theta$ ), 指向材料区域内部, 在  $i$  方向的分量为  $C_{ijmn} n_j$ .

将式 (6) 中把积分号内的两项拆开, 得到均匀化系数的变形为

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|\Theta|} \int_{\Theta} C_{ijkl} \chi_{(k \ \delta_l)mn} dV + \frac{1}{|\Theta|} \int_{\Theta} C_{ijmn} dV. \quad (9)$$

从式 (9) 可知在边界力方法中均匀化系数等于对应上述三维线弹性问题的应力在单胞上的体积平均再加上对应弹性张量单胞上的体积平均.

## 2 均匀化方法的 ABAQUS 实现

### 2.1 热应力方法的实现

热应力方法实现中, 关键就是处理热膨胀系数  $\kappa_{kl}^{mn}$ . 从式 (7) 得到:

$$\kappa_{kl}^{mn} = - I_{klmn}. \quad (10)$$

式中:  $\kappa_{kl}^{mn}$  为四阶对称张量, 由于温度变化引起的变形为

$$\varepsilon_{kl}^T = \kappa_{kl}^{mn} \Delta T. \quad (11)$$

采用 Voigt 规则表示热膨胀系数  $[\kappa]$  随指标的变化 (其中  $kl$  为行变化,  $mn$  为列变化), 写成

矩阵形式为

$$[\kappa] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

在文献 [1] 中热膨胀系数有误, 为本文的相反数. 在 ABAQUS 中通过修改用户子程序 UEXPAN () 来实现变化的热膨胀系数. 在 ABAQUS 的 inp 文件中通过加入语句 \* Expansion, type = ANISO, user 来表示定义用户自定义各向异性的热膨胀系数. 下面给出了用户子程序原文件 (\* .for) 的内容和说明. 由于在单胞内所有材料同一分析步的热膨胀系数都相同, 所以并不需要区分不同材料.

```
subroutine uexpan ( expan, dexpan, temp,
time, dtime, p, predef, dpred,
$ statev, cmname, nstatv, noel)
include 'aba_param.inc'
character* 80 cmname
dimension expan(*), dexpan(*), temp(2),
time(2), predef(*),
$ dpred(*), statev(nstatv)
! expan(1), expan(2), expan(3), expan(4),
expan(5), expan(6)
! 为按 11 22 33 12 13 23 排列的
热膨胀系数
if ( abs ( temp (2) - 1.0 ) .lt. 0.01 ) then ! 第
一个分析步
expan(1) = -1.0
expan(2) = 0.0
expan(3) = 0.0
expan(4) = 0.0
expan(5) = 0.0
expan(6) = 0.0
... 从第二分析步到第六分析步的定义
endif
return
end
```

### 2.2 边界力方法的实现

边界力方法实现中, 关键就是处理边界力, 其分量形式为  $-C_{ijmn} n_j$ , 而对于各向同性材料的弹性张量为

$$C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}). \quad (13)$$

令  $F_{imn}^b = -C_{ijmn} n_j$ , 为了表示清楚, 把  $F^b$  写成矩阵形式 (其中,  $i$  为行变化,  $mn$  为列变化) 为

$$F^b = - \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)n_1 & \lambda n_1 & \lambda n_1 & \mu n_2 & \mu n_3 & 0 \\ \lambda n_2 & (\lambda + 2\mu)n_2 & \lambda n_2 & \mu n_1 & 0 & \mu n_3 \\ \lambda n_3 & \lambda n_3 & (\lambda + 2\mu)n_3 & 0 & \mu n_1 & \mu n_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

在 ABAQUS 中通过修改用户子程序 UTRACLOAD() 来实现变化的面分布力. 在 ABAQUS 的 inp 文件中通过加入语句 \* Dsload, op = NEW, follower = NO 来表示定义了用户自定义的变化的面边界力. 下面给出用户子程序原文件 (\* .for) 的内容与说明. 在不同材料界面的边界力与材料相关, 所以需要区分单胞内的材料.

```
SUBROUTINE UTRACLOAD(ALPHA, T_USER, KSTEP, KINC, TIME, NOEL, NPT, COORDS, DIRCOS, JLTYP, SNAME)
```

```
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
```

```
DIMENSION T_USER(3), TIME(2), COORDS(3), DIRCOS(3,3)
```

```
CHARACTER* 80 SNAME
```

```
parameter(aec11 = 426.857e6)
```

```
parameter(aec12 = 113.468e6)
```

```
parameter(aec44 = 156.694e6)
```

```
parameter(bec11 = 102.085e6)
```

```
parameter(bec12 = 50.280.8e6)
```

```
parameter(bec44 = 25.902.3e6)
```

```
! alpha 为边界力在积分点的合力的大小
```

```
! T_USER(1), T_USER(2), T_USER(3) 为这个边界力的方向
```

```
if(kstep == 1) then ! 第一个分析步
```

```
if(sname == 'ASSEMBLY_SURF-FIBER') then
```

```
! 在纤维边界上加边界力
```

```
T_USER(1) = dircos(1,3) * aec11
```

```
T_USER(2) = dircos(2,3) * aec12
```

```
T_USER(3) = dircos(3,3) * aec12
```

```
elseif(sname == 'ASSEMBLY_SURF-MATRIX') then
```

```
! 在基体边界上加边界力
```

```
T_USER(1) = dircos(1,3) * bec11
```

```
T_USER(2) = dircos(2,3) * bec12
```

```
T_USER(3) = dircos(3,3) * bec12
```

```
endif
```

```
... 从第二分析步到第六分析步的定义
```

```
endif
```

```
alpha = sqrt(t_user(1) * t_user(1) + t_user(2) *
```

```
t_user(2)
```

```
$ + t_user(3) * t_user(3))
```

```
if(alpha .gt. 1.0e-5) then ! 判断合力是否
```

```
大于零
```

```
T_USER(1) = T_USER(1) / alpha
```

```
T_USER(2) = T_USER(2) / alpha
```

```
T_USER(3) = T_USER(3) / alpha
```

```
endif
```

```
return
```

```
end
```

### 2.3 周期性边界条件和分析步设定

在式(2)中定义的边界条件实际上就是单胞在边界上的周期性条件. 在 ABAQUS 中通过关键词 \* TIE 来定义, inp 文件中需要加入语句 \* Tie, name = Constraint - 1, adjust = no, position tolerance = 1.0, 注意一定要定义好 \* TIE 语句中的 POSITION TOLERANCE, 否定可能会得出错误的结果. 图 1 中给出了 ABAQUS 中实现周期性边界条件的具体过程. 图 1 中有两个对应面, ABAQUS 中称为主面和从面, 相当于图 1 中面 ABCD 和面 EFGH 的关系. 当然要求网格划分后主面的网格相对于从面要稀一点, 这样从面内任意一点都可以由主面内节点来约束. a b c 为从面内划分网格后的三个节点, 1 2 3 为主面内的三个节点. 从面内 a 点可以由对应点 1 来约束, 即 a 点处与 1 点处特征函数相等; 从面上 b 点在主面上的对应点为 1 点与 2 点的中点, b 点处的特征函数由 1 点、2 点处特征函数相加的一半得到; 从面上 c 点在主面内对应点为 c', 但是它并不是主面内的节点, c 点处的特征函数由点 1 2 3 处特征函数关于形状函数插值 c' 点得到, 也就建立了 c 点处的特征函数与点 1 2 3 处特征函数的多点约束.

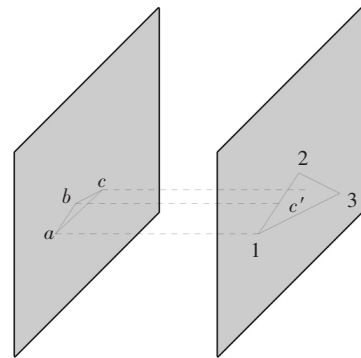


图 1 周期性边界条件在 ABAQUS 中的实现

从式(4)中可以看出, 随着  $mn$  的变化, 最多要解 9 组三维弹性力学位移场问题, 而由于对称性, 其实只有 6 组. 在解这 6 组问题中, 有限元方程中的位移边界条件, 形成左端项的刚度矩阵

(网格固定的情况下)都不会变化,只是在热应力方法中热膨胀系数变化,边界力方法中边界力变化.基于上述分析,完全可以利用 ABAQUS 提供的线性摄动步 (linear perturbation step) 功能,把上述 6 组问题当作 6 个线性摄动步来分析.采用线性摄动步不需要在计算每一组时都重新形成刚度矩阵,这样可以大大节约计算时间.

### 2.4 应力在单胞上的积分

由 ABAQUS 得到单胞特征函数后,为了得到均匀化系数,需要通过数值积分计算式 (6),具体计算中在单胞单元上采用高斯积分.

$$\int_{\theta} \sigma_{ij} dV = \sum_e \int_{V^e} \sigma_{ij} dV = \sum_e \sum_I \sigma_{ij}^I J(I) W(I). \quad (15)$$

式中:  $\sum_e$  为在单胞所有单元上求和,  $\sum_I$  为一个单元高斯积分点在求和,  $\sigma_{ij}^I$  为  $\sigma_{ij}$  在高斯积分点  $I$  的值,  $J(I)$  为单元高斯积分点  $I$  上的 Jacobian 值 (Jacobian 矩阵行列式的绝对值),  $W(I)$  为在高斯积分点  $I$  的权重.均匀化系数的计算在 ABAQUS 通过自编脚本 (ABAQUS scripting) 文件来实现.

## 3 数值模拟

为了证实上述两种方法的可行性,对单向复合材料性能进行预报.单胞模型取为单向纤维增强复合材料的三维模型,采用 C3D8 单元.纤维体积分数  $V_f = 0.267$ ,纤维的弹性模量  $E_f = 379.2 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu_f = 0.21$ ,基体的弹性模量  $E_m = 68.9 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu_m = 0.33$ .为了比较结果采用相同单胞用 Mori Tanaka 方法和自洽方法计算的均匀化系数 (等效模量),表 1 给出了结果.从表 1 可以看到用 ABAQUS 实现的两种方法计算很接近,与 MTM 和 SCM 计算结果可以比较好的对应,这也说明了方法的正确性.

表 1 均匀化方法数值计算结果比较

	$C_{11} / \text{GPa}$	$C_{12} / \text{GPa}$	$C_{13} / \text{GPa}$	$C_{33} / \text{GPa}$	$C_{44} / \text{GPa}$	$C_{66} / \text{GPa}$
热应力方法	136.28	59.32	57.32	185.48	34.93	38.14
边界力方法	136.13	59.30	57.30	185.22	34.90	38.10
SCM	136.6	61.8	57.8	185.7	37.4	40.1
MTM	134.2	61.4	57.3	185.6	36.4	38.2

## 4 结 论

1) 通过通用有限元软件 ABAQUS 实现了均匀

化方法,包括热应力方法和边界力方法.验证热应力方法和边界力方法对均匀化过程实现了一致性.

2) 利用 ABAQUS 脚本程序做到了在 ABAQUS 环境很便捷的就可以得到均匀化系数计算结果,对复合材料有效性能进行了预报.

## 参考文献:

- [1] YUAN Z, FISH J. Toward realization of computational homogenization in practice [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 73(3): 361 - 380.
- [2] ESHELBY J D. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems [J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1957, 241(1226): 376 - 396.
- [3] MORI T, TANAKA K. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with mistting inclusion [J]. Acta Metallurgica, 1973, 21: 571 - 574.
- [4] HILL R. A self-consistent mechanics of composite materials [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1965, 13(4): 213 - 222.
- [5] BENSOUSSAN A, LIONS J L, PAPANICOLAOU G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures [M]. New York: North-Holland, 1978.
- [6] SANCHEZ-PALENCIA E. Non-homogeneous Media and Vibration Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [7] GUEDES J M, KIKUCHI N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1980, 83(2): 143 - 198.
- [8] FISH J, SHEK K. Finite deformation plasticity of composite structures: computational models and adaptive strategies [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 172(1/4): 145 - 174.
- [9] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization I — Homogenization theory for media with periodic structures [J]. Computers and Structures, 1998, 69(6): 707 - 717.
- [10] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization II — Analytical and numerical solution of homogenization equations [J]. Computers and Structures, 1998, 69(6): 719 - 738.
- [11] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization III — Topology optimization using optimality criteria [J]. Computers and Structures, 1998, 69(6): 739 - 756.
- [12] 刘书田, 程耿东. 复合材料应力分析的均匀化方法 [J]. 力学学报, 1997, 29(3): 306 - 313.

(编辑 张 红)